

4.1.1. Matritsalar ni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallari

4.1.2-ta'rif. Bir xil tuzilishli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matritsalar ning yig'indisi deb shunday C matritsaga aytiladiki, uning elementlari A va B matritsalar mos elementlarining yig'indisidan iborat bo'ladi va $C=A+B$ deb yoziladi.

Ta'rif bo'yicha

$$C = A + B, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Matritsalar yig'indisi ta'rifidan ularni qo'shish amalining quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. A + (B + C) = (A + B) + C;$$

$$2^0. A + B = B + A;$$

$$3^0. A + E^0 = A \text{ (bunda } E^0 = (0), A, B, C \text{ – berilgan bir xil tuzilishli matritsalar)}.$$

Matritsalar ning ayirmasi ularni qo'shishga teskari amal tariqasida ta'riflanadi, ya'ni bir xil tuzilishli A va B matritsalar ning ayirmasi deb, shunday C matritsaga aytiladiki, $B + C = A$ bo'ladi va $C = A - B$ deb belgilanadi.

Bu ta'rif asosida $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ bo'lsa,

$$C = A - B, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

natija olinadi.

Tuzilishlari bir xil bo'lmagan, matritsalar ni qo'shish va ayirish amallari aniqlanmagandir.

4.1.3-ta'rif. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matritsani α songa ko'paytmasi deb, uning barcha elementlarini shu α songa ko'paytirishdan hosil qilingan matritsaga aytiladi va αA yoki $A\alpha$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}.$$

Matritsani songa ko'paytirish amalining ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. 1 \cdot A = A \cdot 1 = A;$$

$$2^0. A \cdot 0 = 0 \cdot A = E^0;$$

$$3^0. \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A;$$

$$4^0. (\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A;$$

$$5^0. \alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B.$$

Bu yerda A va B – bir xil tuzilishli matritsalar, α va β - haqiqiy sonlardir.

Yuqorida ta'riflangan qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish matritsalar ustidagi chiziqli amallardan iboratdir.

4.1.2. Matritsalar ni ko'paytirish

Tuzilishlari mos ravishda $m \times n$ va $p \times q$ bo'lgan

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{p \times q}$$

to'g'ri to'rt burchak matritsalar berilgan bo'lsin. Agar A matritsani ustunlari soni n B matritsani satrlari soni p ga teng bo'lsa, bu matritsalar ni ko'paytirish amali ma'noga ega bo'ladi.

4.1.4-ta’rif. Berilgan tartibda olingan $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ va $B = [b_{ij}]_{n \times q}$ matritsalarining ko‘paytmasi deb shunday $C = [c_{ij}]_{m \times q}$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}; \quad i = \overline{1; m}, \quad j = \overline{1; q} \quad (4.1.2)$$

formula bilan aniqlanadi va $AB=C$ kabi belgilanadi.

Ta’rifdan matritsalarini ko‘paytirish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

Ikki matritsaning ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan matritsaning i – satri va j – ustunida turuvchi elementni hisoblash uchun birinchi matritsaning i – satridagi har bir elementini ikkinchi matritsaning j –ustunining mos elementiga ko‘paytirib, so‘ngra ularni qo‘shish kerak ((4.1.2) formulaga qarang).

Masalan, quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

to‘g‘ri to‘rt burchak matritsalar ko‘paytmasini topaylik:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Matritsalarini ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. \quad A(BC) = (AB)C;$$

$$2^0. \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$3^0. \quad (A \pm B) \cdot C = A \cdot C \pm B \cdot C;$$

$$4^0. \quad C(A \pm B) = CA \pm CB;$$

$$5^0. \quad A \text{ va } B \text{ lar bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa,}$$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) \quad [4].$$

Bu yerda A, B, C matritsalar, α - haqiqiy son.

Ikki matritsaning ko‘paytmasi uchun kommutativlik (o‘rin almashtirish) xossasi umuman aytganda o‘rinli emas, yani ushbu $AB=BA$ tenglik doim o‘rinli bo‘lavermaydi. Ammo, ular bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lib, bittasi E – birlik matritsadan iborat bo‘lganda (masalan, $B=E$) $AE=EA=A$ tenglik o‘rinlidir.

Agar A va B matritsalar uchun $AB=BA$ bajarilsa, u vaqtda ular *kommutativ matritsalar* deyiladi. Yuqorida eslatganimizdek, birlik matritsa o‘zi bilan bir xil tartibga ega bo‘lgan kvadrat matritsa bilan kommutativdir.

Matritsalarini ko‘paytirish ular ustidagi chiziqsiz amaldir.

4.1.3. Matritsani transponirlash

4.1.5-ta’rif. Berilgan $m \times n$ tuzilishli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matritsadan uning satrlarini mos ustunlar qilib yozish natijasida hosil qilinadigan matritsani A ga nisbatan *transponirlangan matritsa* deyiladi va uni A^* (yoki A') bilan belgilanadi, ya’ni

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar A matritsa $m \times n$ tuzilishli bo'lsa, A^* matritsa $n \times m$ tuzilishli bo'ladi.

Matritsani transponirlash amali doimo aniqlangan bo'lib, quyidagi hossalarga ega:

1⁰. $(A^*)^* = A$

2⁰. A va B lar bir xil tuzilishli bo'lganda $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$

3⁰. $A = [a_{ij}]_n$ – *simmetrik kvadrat matritsa*, ya'ni $a_{ij} = a_{ji}$ $i, j = \overline{1, n}$ bo'lsa, $A^* = A$ bo'ladi, va aksincha.

4⁰. Agar A va B matritsalar uchun AB aniqlangan bo'lsa, $(AB)^* = B^* A^*$ o'rinlidir.